Рассмотрим постановку эллиптической задачи с граничными условиями первого рода (в дальнейшем для общности также необходимо будет рассмотреть задачу с условиями и третьего рода)

Пусть уравнение Пуассона

 (1)

решается в области  с условиями









Кроме этой задачи, для уравнения Пуассона



в той же области  поставлена задача с условиями









Данная задача получена из Задачи 1 заменой *x* на –*x*.

Верно равенство



Введем две новые функции



Применим к этим функциям оператор Лапласа, получим



На границах области для функции выполняются условия









В силу того, что функция четная, выполнено .

Аналогично



На границах области для функции выполняются условия









В силу того, что функция нечетная, выполнено .

Каждую из этих двух функций можно искать на той же сетке (с той же точностью ε, определяемой аппроксимацией, или с точностью ε/2), что и исходную, но в области 

Известно, что главную трудность при решении систем сеточных уравнений представляет собой итерационное решение СЛАУ большой размерности – такая система плохо обусловлена. Как следствие, скорость сходимости итераций медленная.

Для ускорения сходимости итераций и более быстрого уменьшения низкочастотной составляющей невязки применяется многосеточный итерационный метод, предложенный Р.П. Федоренко. Суть его заключена в следующем. После нескольких итераций на подробной сетке проводится ограничение решения на секу менее подробную, для которой число обусловленности значительно меньше. После нескольких итераций. позволяющих погасить высокочастотные компоненты невязки, проводится ограничение на менее подробную сетку и так далее.

Затем следует обратный ход итераций – переход от последовательности грубых сеток ко все более и более подробным. На этом этапе уже необходима интерполяция результатов расчета на грубой сетке. Свойства оператора интерполяции во многом определяют свойства метода.

Путем разделения на «четную» и «нечетную» части задачи мы получаем две независимых задачи на сетках с меньшим числом узлов. Стало быть, для каждой из этих систем оператор получается лучше обусловленным, скорость сходимости становится выше.

В отличие от классического многосеточного метода, на сетках с меньшим числом узлов получается не одна задача, а две. Но при обратном ходе алгоритма нам не потребуется строить оператор интерполяции – достаточно нужную функцию просто продолжить на большую область четным или нечетным образом соответственно.

Заметим, что каждую из получившихся задач можно разбить еще на две подзадачи в области . На этом этапе используется уже разделение на четную и нечетную части по направлению *y*.

Мы получим четыре задачи

Пусть уравнение Пуассона

 (3)

решается в области  с условиями









Кроме этой задачи, для уравнения Пуассона



в той же области  поставлена задача с условиями









Данная задача получена из Задачи 3 заменой *y* на –*y*.

Снова введем в рассмотрение две новые функции



Так как первая из этих функция четная по *y*, то  Для второй функции верно  Для каждой из этих функций может быть поставлена задача в области, например, 

Аналогично задача для функции  может быть разделена на задачи для двух функций   

Каждая из этих задач может независимо решаться на своем исполнителе.

Может быть, для однопроцессорного вычислительного комплекса с четырьмя ядрами такого расщепления будет достаточно для решения не очень объемных задач. Как правило, для решения уравнений и систем эллиптического типа в настоящее время применяются сетки, включающие в себя миллионы и десятки миллионов узлов, и достигнутого на данном пути ускорения будет недостаточно.

Покажем, как описанную выше процедуру перехода на сетки меньшего размера можно сделать рекурсивной. Нам мешает только изменение типа граничных условий

Применим для этого идеи многосеточного метода. Приблизим исходную задачу для уравнения Пуассона на самой грубой возможной сетке, например, с использованием пятиточечного шаблона «крест»

,

Откуда



или на девятиточечном шаблоне





На ряде внутренних границ вместо условия первого рода при переходе к областям меньшего размера получено условие для нормальной производной. Заменим это условие на интерполяцию по трем точкам соответствующего решения на грубой сетке вдоль координатной линии. Тогда получим в качестве приближения условие первого рода.

При рекурсивном применении данного вариант алгоритма при переходе к областям  потребуется решить исходную задачу на сетке, включающей в себя 25 узлов. При этом в качестве начального приближения следует выбирать значения, получаемые квадратичной интерполяцией по трем узлам.